La mesure en mécanique quantique *via* l'interprétation

Michel Gondran
Université Paris Dauphine (LAMSADE)
Exposé à l'Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences
Institut Curie, Paris, France
8 janvier 2024
Compte-rendu rédigé par Abdel O. Kenoufi,
Jean-Pierre Treuil, et Eric Chenin

Michel Gondran (MG) présente des résultats récents d'interprétations sur le fameux problème dit de "la double solution" en mécanique quantique et fruits de recherches entammées il y a plus de vingt ans en collaboration avec Alexandre Gondran (Ecole Nationale de l'Aviation Civile, Toulouse).

Après avoir rappelé parmi d'autres, deux postulats de la mécanique quantique théorique et expérimentale, ainsi que les questions soulevées par la nature non-déterministe et non-intuitive de cette discipline, MG présente le plan de l'exposé lequel sera suivi de questions et de discussions. Dans la première partie, MG rappelle l'existence et la genèse des deux interprétations de la mécanique quantique si les variables de position sont prises en compte : celle de l'onde-pilote de De Broglie-Bohm (dBB) et celle dite de la double solution de De Broglie.
Pour poser le problème et la polémique historique, il cite et lit un extrait d'une lettre d'Albert Einstein à Louis de Broglie datant de 1953. Son auteur reprend la proposition du Prix Nobel de Physique Français de considérer la fonction d'onde Ψ comme le produit de deux solutions de l'équation de Schrödinger $\Psi = \psi \cdot u$, chacune ayant une interprétation physique différente. Ce qui constitue la très fameuse et sujette à débat *Théorie de la Double Solution*. L'exposé de MG a essentiellement pour objectif de reprendre cette dernière et de la revisiter avec un autre point de vue interprétatif où les deux solutions correspondront aux fonctions d'ondes interne et externe. MG propose **trois étapes** pour justifier l'existence de ces deux fonctions d'onde pour un système à N corps : $\Psi^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_N, t)$ est sa fonction d'onde, paramétrée par la constante de Planck (afin de passer éventuellement à la limite semi-classique), vérifiant l'équation de Schrödinger

$$H\Psi^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, .., \mathbf{x}_N, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, .., \mathbf{x}_N, t)}{\partial t}$$

où l'Hamiltonien dans un champ gravitationnel et prenant en compte des interactions à deux corps (électrostatiques) s'écrit comme $H \equiv \sum_j \left(\frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_j} + m_j \mathbf{g}.\mathbf{x}_j \right) + \sum_{j,k} U_{jk}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)$, avec pour conditions initiales $\Psi^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, .., \mathbf{x}_N, 0) = \Psi_0^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, .., \mathbf{x}_N)$.

MG définit les fonctions d'onde internes et externes par les variables sur lesquelles elles opèrent, lesquelles sont

- ✓ Les variables du centre de masse : $\mathbf{x}_G, M$ et $\mathbf{p}_G$ respectivement la position du centre de masse, la masse et l'impulsion totale.
- ✓ Les variables relatives au centre de masse : $\mathbf{x'}_i$ et $\mathbf{p'}_i$.

D'où l'Hamiltonien

$$H \equiv \frac{\mathbf{p}_G^2}{2M} + M\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_G + \sum_i \frac{\mathbf{p}_i'^2}{2m_i} + \sum_{i,j} U_{ij}(\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j') \equiv H_{ext} + H_{int}.$$

Ces fonctions d'onde internes $\varphi_{int}^h(\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', .., \mathbf{x}_N', t)$ et externe $\psi_{ext}^h(\mathbf{x}_G, t)$ sont reliéees à la fonction d'onde globale par $\Psi^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, .., \mathbf{x}_N, t) = \psi_{ext}^h(\mathbf{x}_G, t)\varphi_{int}^h(\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', .., \mathbf{x}_N', t)$, avec $\Psi_0^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, .., \mathbf{x}_N) = \psi_0^h(\mathbf{x}_G)\varphi_0^h(\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', .., \mathbf{x}_N')$,

- ✓ où $\psi_{ext}^h(\mathbf{x}_G, t)$ est la solution de **l'équation externe** de Schrödinger avec la condition initiale : $\psi_{ext}^h(\mathbf{x}_G, 0) = \psi_0^h(\mathbf{x}_G)$.
- ✓ où $\varphi_{int}^h(\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', .., \mathbf{x}_N', t)$ est la solution de **l'équation interne** de Schrödinger avec la condition initiale : $\varphi_{int}^h(\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', .., \mathbf{x}_N', 0) = \varphi_0^h(\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', .., \mathbf{x}_N')$.

MG commence par la fonction d'onde externe reconnue comme étant l'onde-pilote de De Broglie et de David Bohm pour le centre de masse $\mathbf{x}_G$ et qui vérifie l'équation externe :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_{ext}}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Psi_{ext}+V_{ext}(\mathbf{x},t)\Psi_{ext}\text{ avec }\Psi_{ext}(\mathbf{x},0)=\Psi_0(\mathbf{x}).$$

On pose $\Psi_{ext}(\mathbf{x},t)=\sqrt{\rho^\hbar(\mathbf{x},t)}\exp\left(i\frac{S^\hbar(\mathbf{x},t)}{\hbar}\right)$ où $\rho^\hbar(\mathbf{x},t)$ et $S^\hbar(\mathbf{x},t)$ sont respectivement la densité et l'action quantique qui dépendent du paramètre $\hbar$.
MG énonce ensuite un théorème stipulant que des particules statistiquement préparées et dont les densités de probabilité $\rho^\hbar(\mathbf{x},t)$ et les actions quantiques $S^\hbar(\mathbf{x},t)$ (vérifiant les équations de Madelung) convergent vers leurs pendants classiques $\rho(\mathbf{x},t)$ et $S(\mathbf{x},t)$ lorsque $\hbar\to 0$, lesquelles vérifient les équations d'Hamilton-Jacobi dites statistiques :

$$\begin{cases}\frac{\partial S(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\nabla S(\mathbf{x},t)\right)^2+V_{\text{ext}}(\mathbf{x},t)=0 & \text{, et } S(\mathbf{x},0)=S_0(\mathbf{x})\\ \frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\left(\mathbf{x},t\right)\frac{\nabla S(\mathbf{x},t)}{m}\right)=0 & \text{, et } \rho(\mathbf{x},0)=\rho_0(\mathbf{x}).\end{cases}$$

Ce qui permet à MG d'en déduire que pour un ensemble de particules classiques préparées de la même façon, c'est-à-dire pour $\rho_0(\mathbf{x})$ et $S_0(\mathbf{x})$ dans un potentiel $V_{\text{ext}}(\mathbf{x})$, ces particules ont des trajectoires données par le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{m}\nabla S(\mathbf{x},t)$ et la position initiale.
Un autre résultat présenté par MG est le suivant : puisque les équations de Madelung (formulation fluide de l'équation de Schrödinger) convergent vers les équations d'Hamilton-Jacobi statistiques à la limite semi-classique ($\hbar\to 0$), alors l'incertitude sur la position du centre de masse de la particule classique implique une incertitude sur la position de la particule quantique. Il en va de même pour la densité $\rho(\mathbf{x},t)$ et l'action classique $S(\mathbf{x},t)$ qui induisent une densité de probabilité quantique $\Psi_{\text{ext}}(\mathbf{x},t)$, la fonction d'onde.
A l'aide de quelques simulations d'interférences au travers des fentes de Young montrant les trajectoires de fullerènes (C_{60}) et d'électrons, caractérisant les fonctions d'onde externes, MG conclut cette première partie par la nécessité de rajouter la position initiale afin d'obtenir les trajectoires de De Broglie-Bohm dont le champ de vitesse serait donné par $\mathbf{v}^\hbar(\mathbf{x},t)=\frac{1}{m}\nabla S^\hbar(\mathbf{x},t)$. Il propose donc de compléter voire de substituer aux deux postulats présentés en début de l'exposé les suivants :

- ✓ L'état de la particule est donné par la fonction d'onde $\Psi_{ext}(\mathbf{x},t)$ et la position $\mathbf{x}_G(t)$.
- ✓ Son évolution est décrite par l'Equation de Schrödinger pour $\Psi_{ext}(\mathbf{x},t)$
  et par $\frac{d\mathbf{x}_G(t)}{dt}=\frac{1}{m}\nabla S^\hbar(\mathbf{x},t)\mid_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_G(t)}$ pour la position $\mathbf{x}_G(t)$.
- ✓ La compatibilité des conditions initiales $\Psi_0(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_G(0)$ est assurée par la Règle de Born à tout instant $t\geq 0,\ P[\mathbf{x}_G(t)=\mathbf{x}]=|\Psi_{ext}(\mathbf{x},t)|^2$.

Dans la seconde partie, MG commence par citer les différences fondamentales entre fonctions d'onde internes et externes. Ces dernières s'étalent au cours du temps et peuvent se scinder notamment lors des expériences d'interférences des fentes de Young. Les premières restent spatialement confinées, ne s'étalent pas au cours du temps, ne peuvent se scinder au cours du temps sans changer de nature comme dans une réaction nucléaire ou chimique. Ces différences sont donc selon MG à l'origine des différences d'interprétations de la nature de ces fonctions d'onde et donc des polémiques historiques à leur sujet.
MG reprend la problématique introduite au début de l'exposé sur les problèmes de l'indéterminisme et de l'incohérence des postulats de la mesure en mécanique quantique pour proposer la thèse suivante :

- ✓ L'indéterminisme serait dû au fait que la fonction d'onde externe, ne porte pas toute l'information sur l'état du système.
- ✓ La réduction du paquet d'onde ne concerne que la fonction d'onde interne.

Avant de présenter la fonction d'onde interne, MG rappelle les tentatives infructueuses d'Erwin Schrödinger pour construire un paquet d'ondes non-dispersif pouvant représenter une particule. Pour ce faire, il introduisit en 1926 la notion d'états cohérents de l'oscillateur harmonique, lesquels sont caractérisés par le fait que les inégalités d'Heisenberg impulsion-position se ramènent à une simple égalité. Malheureusement cette démarche se heurta à des difficultés lorsqu'elle fut appliquée à l'atome d'hydrogène.
Dans le même esprit que Schrödinger, MG suggère de construire une fonction d'onde interne de type

soliton à partir de l'équation dépendante du temps

$$i\hbar\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}'_1,\mathbf{x}'_2,..,\mathbf{x}'_N,t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta_{\mathbf{x}'_i} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} U_{ij}(|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j|)\right)\varphi(\mathbf{x}'_1,\mathbf{x}'_2,..,\mathbf{x}'_N,t),$$

avec la condition initiale : $\varphi(\mathbf{x}'_1,\mathbf{x}'_2,..,\mathbf{x}'_N,0) = \varphi_0(\mathbf{x}'_1,\mathbf{x}'_2,..,\mathbf{x}'_N)$.

En se basant sur le Théorème de Floquet pour les Hamiltoniens périodiques, MG propose alors de faire l'hypothèse que la solution dynamique à N-corps peut s'écrire comme

$$\varphi(\mathbf{x}'_1,\mathbf{x}'_2,..,\mathbf{x}'_N,t) = \prod_{j=1}^{N}\varphi^j(\mathbf{x}'_j,t).$$

En considérant les ordres de grandeur des orbitales atomiques, MG en déduit que les supports des fonctions d'onde individuelles sont disjoints. Les équations de Schrödinger individuelles s'écrivent comme

$$i\hbar\frac{\partial\varphi^j(\mathbf{x}_j,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_j}\Delta_{\mathbf{x}_j}\varphi^j(\mathbf{x}_j,t) + \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} U_{ji}(|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}^i(t)|)\right)\varphi^j(\mathbf{x}_j,t),$$

où $\mathbf{x}^i(t) = \int \mathbf{x}|\varphi^i(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x}$, et avec les conditions initiales $\varphi^j(\mathbf{x}_j,0) = \varphi_0^j(\mathbf{x}_j)$.
Grâce au Théorème d'Ehrenfest et à l'écriture du Principe Fondamental de la Dynamique pour des forces conservatives $V_j(\mathbf{x},t) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} U_{ji}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^i(t)|)$, plus précisément l'application de la Deuxième Loi de Newton $m_j\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}^j(t) = -\nabla V_j(\mathbf{x},t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^j(t)}$, MG retrouve les solutions de l'atome d'hydrogène de Bohr et Sommerfeld.
Ainsi, la fonction d'onde interne d'un système est un ensemble de solitons qui remplace une fonction d'onde à $3N$ variables par N fonctions d'onde dans un espace à 3 dimensions.

Dans la troisième partie, MG caractérise plusieurs problématiques de mesure selon le type de fonction d'onde étudiée, interne ou externe. Il considère deux expériences : celle de Stern et Gerlach (1922) pour la mesure des spins d'atome d'argent et le paradoxe EPR pour l'intrication (1935). Dans l'expérience de Stern et Gerlach, en exprimant la fonction d'onde externe sous forme de spineur gaussien en x et z

$$\Psi^0(x,z) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(z^2+x^2)}{4\sigma_0^2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_0}{2} e^{i\frac{\varphi_0}{2}} \\ i\sin\frac{\theta_0}{2} e^{-i\frac{\varphi_0}{2}} \end{pmatrix},$$

il en déduit que sans extension spatiale il ne peut y avoir de prise en compte de la position.
Introduisant le champ magnétique, il utilise les solutions des équations de Pauli

$$i\hbar\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_+}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi_-}{\partial t} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} + \mu_B\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix},$$

pour trouver des solutions pour les trajectoires et les spins

$$\begin{cases} \dfrac{dX_G(t)}{dt} = \frac{\hbar}{2m\rho}\mathrm{Im}(\Psi^\dagger\boldsymbol{\nabla}\Psi)|_{\mathbf{x}=X_G(t)}, \\ \mathbf{s}(\mathbf{x},t) = \frac{\hbar}{2\rho}\Psi^\dagger(\mathbf{x},t)\sigma\Psi(\mathbf{x},t) = \frac{\hbar}{2}(\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta). \end{cases}$$

Le spin étant donné sur une trajectoire individuelle par $\mathbf{s} = \mathbf{s}(X_G(t),t)$. A l'aide de simulations numériques, MG interprète l'expérience de Stern et Gerlach comme n'exhibant pas de projections du spin sur l'axe vertical $[Oz)$, mais plutôt ce qu'il dénomme un **redressement** selon le gradient du champ. De plus, selon lui, le résultat dépend du centre de masse dans l'onde et la durée dépend du temps pour redresser le spin. De plus la valeur du spin ne serait pas pré-existante mais contextuelle. les fonctions d'onde considérées ici seraient donc des fonctions d'onde externes.

L'expérience EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) est considérée dans sa version dite B (Bohm-Bell), ou EPRB. MG pose les fonctions d'ondes initiales de A et B comme $\Psi_0^A(\mathbf{x}_G^A,\theta_0^A,\varphi_0^A)$ et $\Psi_0^B(\mathbf{x}_G^B,\theta_0^B,\varphi_0^B)$ avec des spins opposées : $\theta_0^B = \pi - \theta_0^A$, $\varphi_0^B = \varphi_0^A - \pi$. Il écrit ensuite la fonction d'onde singulet avec une extension spatiale

$$\Psi_0(\mathbf{x}_G^A, \mathbf{x}_G^B) = \frac{1}{\sqrt{2}} f(\mathbf{x}_G^A) f(\mathbf{x}_G^B) \Big(|+_A\rangle |-_B\rangle - |-_A\rangle |+_B\rangle \Big).$$

MG exhibe des simulations numériques qui montrent les orientations du vecteur spin le long de la trajectoire, la position de la particule existant avant la mesure.

Avant de passer aux questions et discussions, MG propose une conclusion et une liste de perspectives. Il reprend la thèse selon laquelle la fonction d'onde externe ne porte pas toute l'information sur le système et que la réduction du paquet d'onde ne concerne que la fonction d'onde interne et que de plus, le spin a une valeur contextuelle et qu'il effectue un redressement selon le gradient du champ lors d'expérience de mesures. Il termine sa conclusion en indiquant que son approche permettrait de mieux comprendre d'autres interprétations telles que celles de Born sur la fonction d'onde externe, les mondes d'Everett, ... Enfin, il liste les éléments d'une grille de lecture pour d'autres problèmes tels que la gravitation quantique, la théorie quantique des champs, ...
Jean-Pierre Treuil ne pose pas de questions, mais fait remarquer que le problème de la mesure se pose dans toutes les sciences autres que les mathématiques. Il émet le souhait d'un exposé futur sur les problèmes de la mesure dans les différentes interprétations de la mécanique quantique, et suggère de prendre de la hauteur par rapport à ces problèmes de mesures, inhérents à toutes les disciplines liées à l'expérience.
MG continue la discussion en expliquant que l'Ecole Française ne valide que les théories et méthodes issues de l'Ecole de Copenhague, et qu'elle néglige voire élude le point de vue de De Broglie-Bohm, et ce, jusque dans l'enseignement de la mécanique quantique. Il continue en introduisant le problème de la validité des expériences d'interférences de type Young et propose des expériences qui valideraient les simulations effectuées pour les molécules de fullerènes.
Benoît Prieur continue la discussion en rétorquant qu'une bactérie qui contient un nombre très grand de molécules et une très grande quantité d'informations, ne peut être vue comme une onde, car dans une expérience d'interférence de type Young, il n'est pas réaliste d'imaginer qu'elle puisse se reconstituer après le passage par les fentes. Il pose qu'il existe un biais cognitif de déni d'une réalité dont l'origine remonterait à au physicien W. Pauli en 1927 lors de l'élaboration des modèles de l'électron. Le problème de la mesure serait donc dû à un biais cognitif.
Françoise Dutheil évoque la perspective présentée en fin d'exposé par MG de quantification de la gravitation grâce à son approche des fonctions d'onde internes/externes. MG répond qu'il a publié un article pour la fondation De Broglie montrant qu'il pouvait retrouver les équations de la gravitation classique en partant de la mécanique quantique,et en tenant compte des fonctions d'onde internes, appliquées à l'équation d'Einstein de la gravitation.
Jean-Pierre Treuil revient sur la potentielle expérience des fentes de Young avec des molécules de fullerènes afin de bien comprendre le dispositif expérimental et sur les résultats attendus. On verra des figures d'interférences si l'écran est suffisamment éloigné. La discussion continue sur l'interprétation de Copenhague de l'ubiquité de l'électron lors du passage au travers des fentes dans l'expérience de Young.
Après différentes remarques d'Edith Perrier sur la pédagogie et l'apprentissage de la mécanique quantique, Benoît Prieur et MG relatent quelques anecdotes d'Histoire et de Philosophie des sciences, notamment sur le Positivisme.
Abdel Kenoufi indique ensuite commentl'équation de Schrödinger dépendante du temps avec un potentiel ne dépendant pas du temps, devient l'équation indépendante du temps qui est un problème aux valeurs propres bien connu. Il fait aussi noter quelques différences importantes entre différents ouvrages de mécanique quantique d'auteurs français, Albert Messiah, Claude Cohen-Tannoudji par exemple. Il reprend les remarques de Benoît Prieur sur le positivisme et explique que l'Ecole de Copenhague a été fortement influencée, N. Bohr en particulier par les Sciences Sociales et certains courants philosophiques du premier quart de siècle. Il fait enfin la comparaison entre les contenus de l'enseignement de la mécanique quantique entre différents pays où il a vécu et enseigné (Danemark, Etats-Unis, Russie, France, Suisse), leurs positionnements vis-à-vis de la polémique interprétative Ecole de De Broglie-Bohm *versus* Ecole de Copenhague. Enfin, il demande si les simulations sont *ab initio*, autrement dit, basées sur la résolution des équations de Schrödinger, MG répond par la négative arguant du fait qu'il ne simule que les comportements des solutions basées sur le centre de gravité.
MG clôt la conférence en montrant et commentant quelques vidéos montrant des simulations numériques des expériences citées précédemment.